EJERCITACION

CALCULO DE RAICES DE ECUACIONES

Ejercicio n° 1:

Dadas las siguientes funciones, determine gráficamente (sin utilizar calculadora) cuántas raíces reales tienen e indique un intervalo de longitud 1 para cada una de las raíces.

a) $f_1(x) = e^x + x - 4$ b) $f_2(x) = \text{sen}(x) - 2x + 1$ c) $f_3(x) = e^x + x^3 + 1$

d) $f_4(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 2$ e) $f_5(x) = \ln(x) + x - 2$ f) $f_6(x) = 1/x - x^2 + 7x - 6$

g) $f_7(x) = 2e^{-x} - x^2 + 6x - 5$ h) $f_8(x) = x - \cos(2x)$ i) $f_9(x) = x^2 - 2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 6x + 8$

j) $f_{10}(x) = \ln(x) + x^2 - 8x + 12$ k) $f_{11}(x) = e^{x-1} + x - 3$ l) $f_{12}(x) = \text{sen}(\pi x) - x^2 + 10x - 13$

m) $f_{13}(x) = x^6 + 20x - 25$ n) $f_{14}(x) = \text{sen}(x) - x^2$ ñ) $f_{15}(x) = \ln(x-1) + 1 - 3\,\text{sen}(\pi x)$

Ejercicio n° 2:

a) Nombre los criterios de detención de un proceso iterativo de cálculo de raíces de ecuaciones, y la pertinencia de su utilización.

b) Defina orden y radio de convergencia de un método de cálculo de raíces, y su relación con la velocidad de convergencia.

Ejercicio n° 3:

Explique conceptualmente el Método de Bisección para cálculo de raíces de ecuaciones. Indique cuales son las condiciones necesarias y suficientes para que el método converja a una raíz.

Ejercicio n° 4:

Indique un intervalo para la raíz positiva de $x^2 - 2x - 2 = 0$. Utilice el método de bisección para calcular la raíz con dos decimales exactos. Establezca el número máximo de pasos necesarios para aproximar la raíz con una precisión de 10^{-6}.

Ejercicio n° 5:

Cada una de las siguientes funciones verifica que $sg[f(a)] \neq sg[f(b)]$ en $(a,b) = (0,1)$ ¿Qué punto localiza el algoritmo de bisección? ¿Es una raíz? Justifique.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ b) $f(x) = \cos(10x)$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0.3 \\ -1 & x < 0.3 \end{cases}$

Ejercicio n° 6:

Marque la respuesta correcta y justifique: Para hallar la raíz de una f(x) continua en (3;5) con sg[f(3)] $\neq$ sg[f(5)] con $\varepsilon < 10^{-5}$ por Bisección:

a) son necesarias 17 iteraciones
b) son suficientes 18 iteraciones
c) son necesarias 18 iteraciones
d) ninguna de las anteriores es correcta

Ejercicio n° 7:

Dada f(x) = 0 con una raíz en el intervalo (a, a+1). Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

a) Si f(x) tiene pendiente grande, entonces el método de bisección converge más rápido.
b) Si se aplica el método de bisección en dicho intervalo, al cabo de 10 iteraciones se tendrá una precisión de 10^{-10}.

Ejercicio n° 8:

Explique conceptualmente en qué consiste el método de Regula Falsi para el caso particular de una función decreciente y cóncava hacia y^+.

Ejercicio n° 9:

Dada $f(x) = x \ln(x) + x$ Indique un intervalo (a,b) e indique qué extremo fijaría para hallar la raíz no nula por el método de Regula Falsi.

Ejercicio n° 10:

Dada la ecuación: $f(x) = 2\,e^{x} - x^2 - 6\,x - 5 = 0$ ¿Qué intervalo podría tomar para calcular la menor raíz real por Regula Falsi sin necesidad de cambiar de extremo fijo? ¿Cuál sería dicho extremo?

Ejercicio n° 11:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

a) Sea $e^{x} + x^{4} - x - 2 = 0$ con raíz en (0,1) $\Rightarrow$ se puede usar Regula Falsi fijando el 1.
b) El método de Bisección siempre converge más lentamente que Regula-Falsi.
c) Dada la función $f(x) = x^4 - 8\,x^3 + 30\,x^2 - 25\,x + 2 - 12\,e^{-x}$, se puede utilizar el Método de Regula - Falsi en el intervalo [1,2] fijando el 2.
d) Si f(x) es creciente en (a,b), en el método de Regula-Falsi queda fijo el extremo b

Ejercicio n° 12:

Dadas las siguientes ecuaciones, proponga un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz, e indique una función g(x) que cumpla las condiciones necesarias y suficientes de Método de Punto Fijo. Haga tres iteraciones y diga la precisión obtenida.

a) $\operatorname{sen}(x) - 2\,x + 1 = 0$
b) $e^{x} - x^2 + 3\,x - 2 = 0$
c) $\operatorname{sen}(x) - x^2 = 0$
d) $2\,e^{-x} - x^2 + 6\,x - 5 = 0$

Ejercicio n° 13:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

a) Si $0 < g'(x) < 1$ en el método de Punto Fijo para calcular raíces de ecuaciones entonces la convergencia es en forma de espiral o alternada.

b) Sea $e^x + x^4 - x - 2 = 0$ con raíz en $(0,1) \Rightarrow$ se puede usar $g(x) = e^x + x^4 - 2$ para hallar la raíz por el método de punto fijo.

c) La función $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ puede utilizarse para hallar una raíz con el método de punto fijo.

Ejercicio n° 14:

La ecuación $x^3 - e^x + 3 = 0$ tiene 2 raíces. Una próxima a –1,4 y la otra cerca de 4,6. Usando el método del punto fijo con $g(x) = \ln(x^3 + 3)$ el método converge a :

a) La raíz cercana a 4,6 b) La raíz cercana a –1,4 c) A ninguna de las dos raíces

d) No es una g(x) adecuada ya que contiene una función logarítmica

Ejercicio n° 15:

Dada la ecuación *f(x)=0* con $f(x) = e^x - \dfrac{x}{x-1}$. Indique con cual o cuales de las siguientes *g(x)* converge el método del punto fijo.

a) $g_1(x) = e^x(x-1)$ b) $g_2(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ c) $g_3(x) = \dfrac{x}{e^x} + 1$ d) $g_4(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Ejercicio n° 16:

Explique conceptualmente en qué consiste el método de Newton Raphson.

Ejercicio n° 17:

Dada la siguiente ecuación: $x^5 - 2x^3 - \ln(x) = 0$ utilice el método de Newton Raphson con $x_0=1$ e itere hasta que se puedan asegurar 5 decimales. ¿Qué ocurre si parte de $x_0=1.1$? Explique.

Ejercicio n° 18:

Dada la ecuación: $(x-3)^{-1} - x^2 + 4x + 1 = 0$ utilice el método de Newton -Raphson hasta encontrar la mayor raíz con $\varepsilon < 10^{-8}$. Transcriba los valores de las aproximaciones x_i.

Ejercicio n° 19:

a) Explique conceptualmente la variante de Von Mises al método de Newton Raphson.

b) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas?

c) ¿En qué casos sería más conveniente?

Ejercicio n° 20:

Marque la respuesta correcta y justifique: Dada la función $f(x) = x \bullet e^{-x}$ con única raíz real en x=0, el método de Newton-Raphson converge a ella:

a) siempre b) sólo tomando $x_0 < 0$ c) sólo tomando $x_0 < 1$ d) sólo tomando $x_0 \in (-1,1)$

Ejercicio n° 21:

La ecuación $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ tiene una raíz en $x = -\sqrt{2}$. El método de Newton-Raphson se acerca a dicha raíz con una precisión de 10^{-9} luego de 20 iteraciones. La causa de que la convergencia sea tan lenta se debe a que:

a) $f''(x)$ cambia de signo en las proximidades de $x = -\sqrt{2}$

b) Se consideró un x_0 tal que $f(x_0) \bullet f''(x_0) < 0$

c) $x = -\sqrt{2}$ es una raíz con orden de multiplicidad mayor a 1

d) Ninguna de las causas anteriores es correcta

Ejercicio n° 22:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

a) Dada $f(x) = 0$ con raíz $p \in (a,b)$, si $\exists\ x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$ entonces el método de Newton - Raphson no converge a la raíz p.

b) Si $|f'(x)| < 1 \Rightarrow$ el criterio de paro más conveniente es $|f(x_n)| < \varepsilon$

Ejercicio n° 23:

Dada la ecuación: $\text{sen}(4x) + 3x + 3 = 0$, indique cual de las afirmaciones es correcta:

a) tiene por lo menos una raíz en el intervalo [-1 ; 0]

b) Se puede aplicar Regula Falsi en [-2 ; -0.5] fijando el extremo b =-0.5

c) tiene una sola raíz real

d) El método de punto fijo converge con la función $g(x) = \text{sen}(4x) + 4x + 3$

e) ninguna es correcta

Ejercicio n° 24:

a) Encuentre gráficamente un intervalo para la mayor raíz positiva de $x^2 - 6x + e^{x-1} = 0$.

b) Halle dicha raíz con 3 cifras significativas. Justifique la elección del método y el criterio de paro.

Ejercicio n° 25:

La suma de dos números es 20. Si a cada número se le añade su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es igual a 155.55. Determine los dos números con exactitud de 10^{-4}.

Ejercicio n° 26:

Aplique el método de Newton-Raphson a $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ con $x_o = 1.9$. ¿Es posible dar una explicación al comportamiento extraño de los valores iterados sucesivos?

Ejercicio n° 27:

La ecuación $x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 14x + 20 = 0$ tiene una raíz en (-2,1). Sin embargo, si se aplica el método de Newton-Raphson con $x_o = -0.3$, llegamos a otra raíz en 5. ¿Por qué?

Ejercicio n° 28:

Dada la ecuación: $x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16 = 0$ cuyas raíces son enteras: -1 , 2 y 4, aplique el método de Newton-Raphson, tomando diferentes valores iniciales x_0 y vea a qué raíz converge en cada caso. Tome los siguientes valores iniciales, previamente piense en forma intuitiva a qué raíz le parece que converge.

- $x_0 = 5$
- $x_0 = -2$
- $x_0 = 1$
- $x_0 = 0$
- $x_0 = 3$
- $x_0 = 3.5$
- $x_0 = 3.3$
- $x_0 = 3.4$
- $x_0 = 3.35$ Ooops!!! ¿Qué pasó?
- $x_0 = 0.035$
- $x_0 = 0.0359$ Y acá también!!!
- $x_0 = 0.036$

Grafique la función, y explique por qué ocurren esas "anomalías". Trate de encontrar otras anomalías de ese tipo.

Ejercicio n° 29:

Demuestre que al aplicar Newton-Raphson a la función $y = x^2 - a$ con a positivo se llega a la fórmula: $x_{n+1} = 1/2\ (x_n + a/x_n)$ que permite calcular el valor de raíz de a sin emplear radicación.

Ejercicio n° 30:

Calcule la raíz cuadrada de 3 con un error menor que 10^{-8}, utilizando los siguientes métodos:

a) Bisección

b) Punto fijo

c) Regula-Falsi

d) Newton-Raphson

Seleccione un criterio de paro adecuado. Compare la rapidez de convergencia de todos los métodos (indique cuántas iteraciones fueron necesarias en cada uno).

RESPUESTAS T.P. CALCULO DE RAICES DE ECUACIONES

1) a) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
   b) Tiene 1 raíz real en el intervalo (0 ; 1)
   c) Tiene 1 raíz real en el intervalo (-2 ; -1)
   d) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (-2 ; -1) , (0 ; 1) y (4 ; 5)
   e) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
   f) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (0 ; 1), (0.5 ; 1.5) y (6 ; 7)
   g) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (-3 ; -2) , (0 ; 1) y (5 ; 6)
   h) Tiene 1 raíz real en el intervalo (0 ; 1)
   i) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (2 ; 3) y (4 ; 5)
   j) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (0 ; 1) , (2 ; 3) y (5 ; 6)
   k) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
   l) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (1 ; 2) y (8 ; 9)
   m) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (-3 ; -2) , y (1 ; 2)
   n) Tiene 2 raíces reales , una en el origen y la otra en el intervalo (0 ; 1)
   ñ) Tiene en total 7 raíces reales, una en el intervalo (1 ; 2) , dos en el intervalo (2 ; 3) , dos en el intervalo (4 ; 5) y otras dos en el intervalo (6 ; 7)

2) Teórico

3) Teórico

4) La raíz $\alpha \in (2,3)$ En el octavo paso podemos asegurar 2.73. Para lograr una precisión de 6 decimales tomando n=20 alcanza.

5) a) No es continua. Biseccidn converge a la asíntota vertical.
   b) Tiene tres raíces en el intervalo. Bisección converge a una de ellas.
   c) No es continua. Bisección converge al punto de discontinuidad.

6) La respuesta correcta es la B.

7) a) FALSO.
   b) FALSO.

8) Teórico

9) La raíz pertenece a (0.2 ; 0.4) En este intervalo se puede aplicar Regula Falsi fijando b = 0.4, la raíz es: 0.36806641

10) La menor raíz pertenece a (-6 ; -5). Se puede aplicar Regula Falsi fijando a = -6

11) a) VERDADERO b) FALSO
   c) VERDADERO d) FALSO

12) a) Raíz en (0 ; 1) . $g(x) = \dfrac{sen(x)+1}{2}$

$x_0 = 1$, $x_1 = 0.9207355$, $x_2 = 0.8980235$, $x_3 = 0.8910484$ con $\varepsilon < 0.01$

b) Raíces en (0 ; 1) y (2 ; 3) . Con $g(x) = \dfrac{x^2 + 2 - e^x}{3}$ sólo se llega a la menor.

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.3333333$, $x_2 = 0.238$, $x_3 = 0.2625$ con $\varepsilon < 0.1$

c) Raíces en 0 y en (0 ; 1) . Con $g(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ llegamos a la mayor:

$x_0 = 1$, $x_1 = 0.84147098$, $x_2 = 0.88609608$, $x_3 = 0.87418133$ con $\varepsilon < 0.1$

d) Raíces en (-3 ; -2), (0 ; 1) y (5 ; 6) . Con $g(x) = \dfrac{2e^{-x} + 6x - 5}{x}$ sólo se llega a la mayor: $x_0 = 5$, $x_1 = 5.00269518$, $x_2 = 5.00322522$ $x_3 = 5.0033294$ con $\varepsilon < 0.001$

13) a) FALSO
b) FALSO
c) VERDADERO

14) La respuesta correcta es la A.

15) Para que el método de Punto Fija converja, debe cumplirse / $g'(x)$ / < 1 en [a,b].

$g_1'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x x$ en [1,2] es mayor que 1 $\Rightarrow$ no converge.

$g_2'(x) = \dfrac{x-1}{x}\left(\dfrac{(x-1) - x}{(x-1)^2}\right) \Rightarrow g_2'(x) = \dfrac{-x+1}{x(x-1)^2} \Rightarrow g_2'(1.1) = 2.3978 > 1 \Rightarrow$ no converge

$g_3'(x) = \dfrac{e^x - x e^x}{e^{2x}} \Rightarrow g_3'(x) = \dfrac{1-x}{e^x} < 1 \ \forall x \in [1,2] \Rightarrow$ converge.

Verificación:

$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1.36787 \Rightarrow x_2 = 1.34832 \Rightarrow x_3 = 1.35012 \Rightarrow x_4 = 1.34996 \Rightarrow x_5 = 1.34997$

$g_4(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ es la fórmula de Newton - Raphson, por lo tanto converge.

16) Teórico.

17) $x_0 = 1$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.64883$, $x_3 = 0.64923$ con $\varepsilon < 10^{-5}$

18) La mayor raíz está en (4 ; 5) Tomando $x_0 = 4$, $x_1 = 4.4$, $x_2 = 4.\ 39139123750961$,
$x_3 = 4.39138238064021$, $x_4 = 4.3913823806309$ con $\varepsilon < 10^{-8}$

19) Teórico.

20) La respuesta correcta es la C.

21) La respuesta correcta es la C.

22) a) FALSO
b) FALSO

23) La respuesta correcta es la C.

24) a) La mayor raíz positiva está en (3 ; 4)
b) Por N-R: $x_0 = 3$, $x_1 = 3.21801754$, $x_2 = 3.1934332$, $x_3 = 3.19307409$

25) Los números son: 6.512851715 y 13.48714828

26) Por Newton Raphson, partiendo de $x_0=1.9$ se va al -15.22608 y luego va volviendo hasta converger en -2. Ello se debe a que la primera recta tangente (en 1.9) tenía una pendiente muy suave por estar cerca de un mínimo relativo en x=1.868517.

27) Ocurre ello pues la recta tangente en x=-0.3 tiene pendiente muy suave, ya que está cerca de un máximo relativo en -0.36.

28) Partiendo de $x_0 = 5$ converge a $\alpha = 4$
Partiendo de $x_0 = -2$ converge a $\alpha = -1$
Partiendo de $x_0 = 1$ converge a $\alpha = 2$
Partiendo de $x_0 = 0$ converge a $\alpha = 4$ y lo hace en 1 solo paso.
Partiendo de $x_0 = 3$ converge a $\alpha = 2$
Partiendo de $x_0 = 3.5$ converge a $\alpha = 4$
Partiendo de $x_0 = 3.3$ converge a $\alpha = 2$
Partiendo de $x_0 = 3.4$ converge a $\alpha = 4$
Partiendo de $x_0 = 3.35$ converge a $\alpha = -1$ pues está cerca de un mínimo relativo.
Partiendo de $x_0 = 0.035$ converge a $\alpha = -1$ pues está cerca de un mínimo relativo.
Partiendo de $x_0 = 0.0359$ converge a $\alpha = 4$ pues está cerca de un mínimo relativo.
Partiendo de $x_0 = 0.036$ converge a $\alpha = 2$ pues está cerca de un mínimo relativo.

29) Se escribe la fórmula iterativa de Newton Raphson y se simplifica un poco.

30) La función a utilizar puede ser: $f(x) = x^2 - 3 = 0 \quad \alpha \in (1,2)$

Por Bisección converge en 23 iteraciones.
Por Newton Raphson converge en 4 iteraciones.
Por Regula Falsi se necesitan 7 iteraciones.
Por Punto fijo con $g_1(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ partiendo de $x_0=2$ converge en 4 iteraciones.

También para Punto Fijo: $g_2(x) = \frac{x+3}{x+1}$ partiendo de $x_0=2$ converge en 13 iteraciones

Y esta $g_3(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2}$ partiendo de $x_0=2$ converge en 10 iteraciones

Hay muchas mas, ¿te animas a encontrar otra?

Cálculo de raíces de ecuaciones

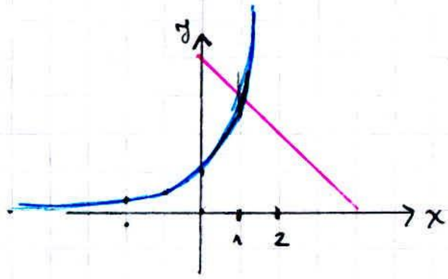
Mat-Sup.

① Dadas las siguientes funciones, determine gráficamente (sin utilizar calculadora) cuántas raíces reales tienen e indique un intervalo de longitud 1 para cada una de las raíces:

a) $f_1(x) = e^x + x - 4$

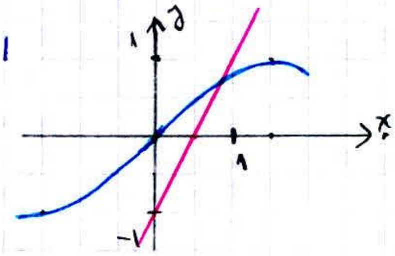
$f_1(x) = 0 \rightarrow e^x + x - 4 = 0 \rightarrow \underbrace{e^x} = \underbrace{4 - x}$

tiene $\boxed{1 \text{ raíz real }, r \in (1,2)}$ ✓



b) $f_2(x) = \operatorname{sen}(x) - 2x + 1$

$\underbrace{\operatorname{sen}(x)} = \underbrace{2x - 1}$

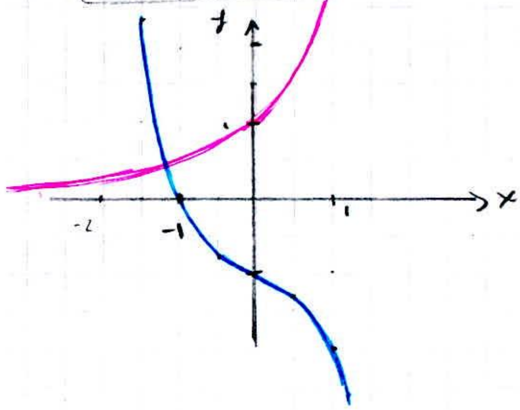


$\boxed{1 \text{ raíz en } (0,1)}$ ✓

c) $f_3(x) = e^x + x^3 + 1$

$\underbrace{e^x} = \underbrace{-x^3 - 1}$

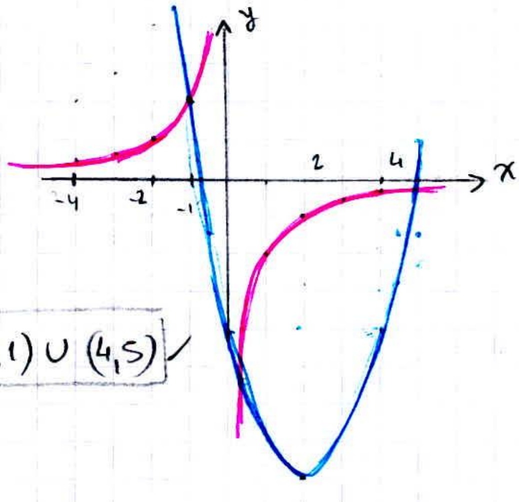
$\boxed{1 \text{ raíz} \in (-2,-1)}$ ✓



d) $f_4(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 2$

$x(x^2 - 4x - 4) = -2$

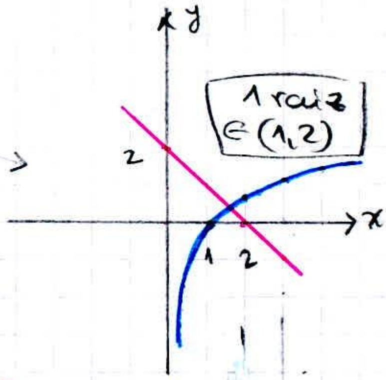
$(x-2)^2 - 8 = -\dfrac{2}{x}$



$\boxed{3 \text{ raíces } : (-2,-1) \cup (0,1) \cup (4,5)}$ ✓

e) $f_5(x) = \ln(x) + x - 2$

$\underbrace{\ln(x)} = \underbrace{2 - x}$

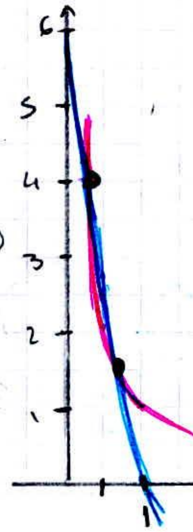


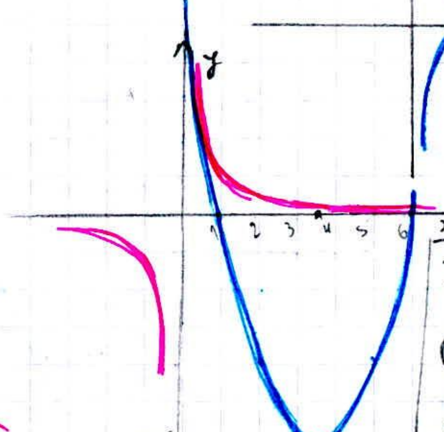
$\boxed{1 \text{ raíz} \in (1,2)}$

f) $f_6(x) = \dfrac{1}{x} - x^2 + 7x - 6$

$\dfrac{1}{x} = x^2 - 7x + 6$

$\underbrace{\dfrac{1}{x}} = \underbrace{\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 - 6{,}25}$





$\boxed{3 \text{ raíces } (-0{,}5, 0{,}5) \cup (0{,}5, 1{,}5) \cup (6,7)}$

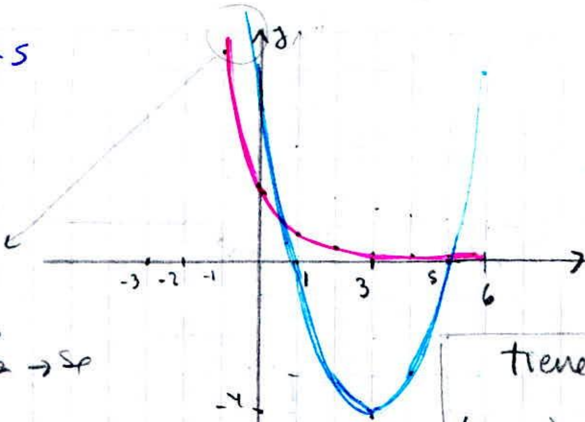
Syl

g) $f_7(x) = 2e^{-x} - x^2 + 6x - 5$

$2e^{-x} = x^2 - 6x + 5$

$\underbrace{2e^{-x}} = \underbrace{(x-3)^2 - 4}$

La exponencial crece más rápido que la parábola → se vuelven a cruzar



$sg\, f(-4) = sg\, f(-3)$

$\boxed{sg\, f(-3) \neq sg\, f(-2)}$

$\downarrow$

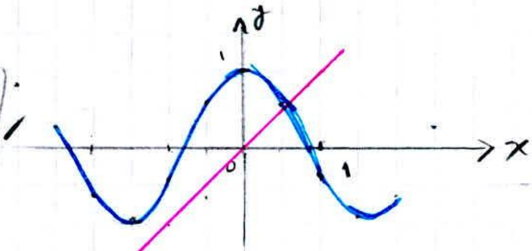
1 raíz $\in (-3,-2)$

$\boxed{\text{tiene 3 raíces: } (-3,-2)\ ;\ (0,1)\ ;\ (5,6)}$

h) $f_8(x) = x - \cos(2x)$

$x = \cos(2x)$

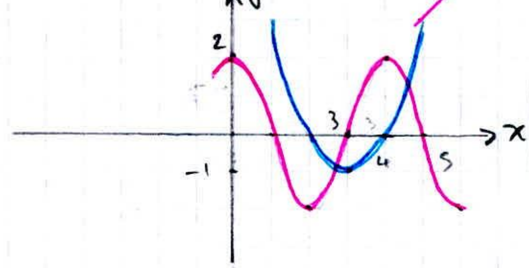
$\boxed{\text{tiene 1 raíz en } (0,1)}$



i) $f_9(x) = x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 6x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$(x-3)^2 - 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$



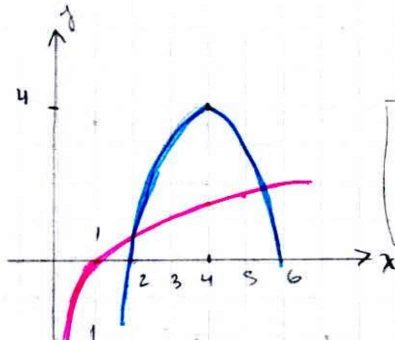
$\boxed{\text{2 raíces en } (2,3)\ ;\ (4,5)}$

j) $f_{10}(x) = \ln(x) + x^2 - 8x + 12$

$\ln(x) = -x^2 + 8x - 12$

$\ln(x) = -\left[(x-4)^2 - 4\right]$

$\underbrace{\ln(x)} = -(x-4)^2 + 4$



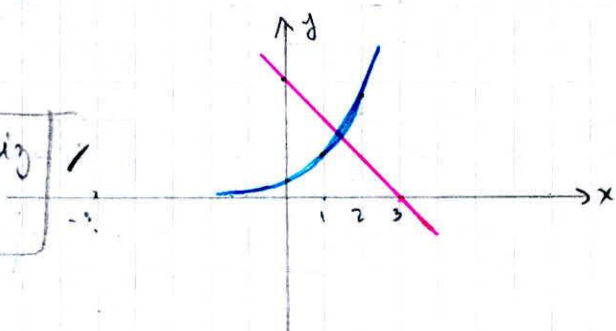
↓ se vuelven a intersecar con $x \in [0;1]$

$\boxed{\text{tiene 3 raíces en: } (0;1)\ ;\ (2;3)\ ;\ (5;6)}$

k) $f_{11}(x) = e^{x-1} + x - 3$

$\underbrace{e^{x-1}} = \underbrace{3-x}$

$\boxed{\text{tiene 1 raíz en } (1,2)}$

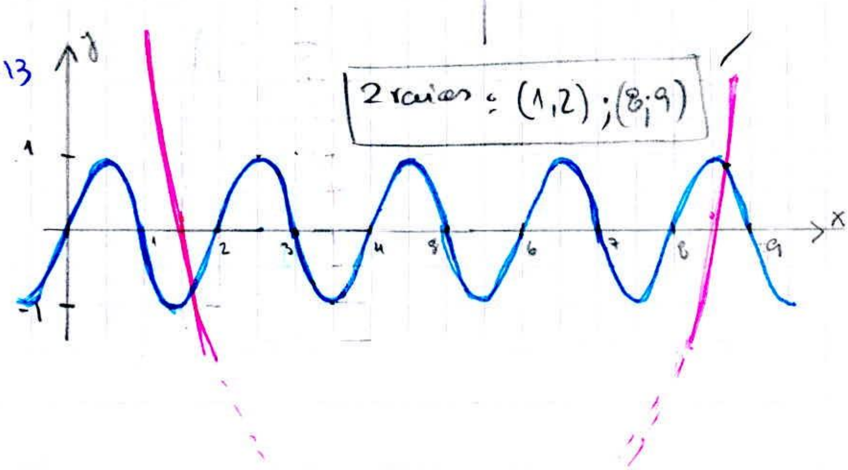


l) $f_{12}(x) = \text{sen}(\pi x) - x^2 + 10x - 13$

$\text{sen}(\pi x) = x^2 - 10x + 13$

$\underbrace{\text{sen}(\pi x)} = \underbrace{(x-5)^2 - 12}$

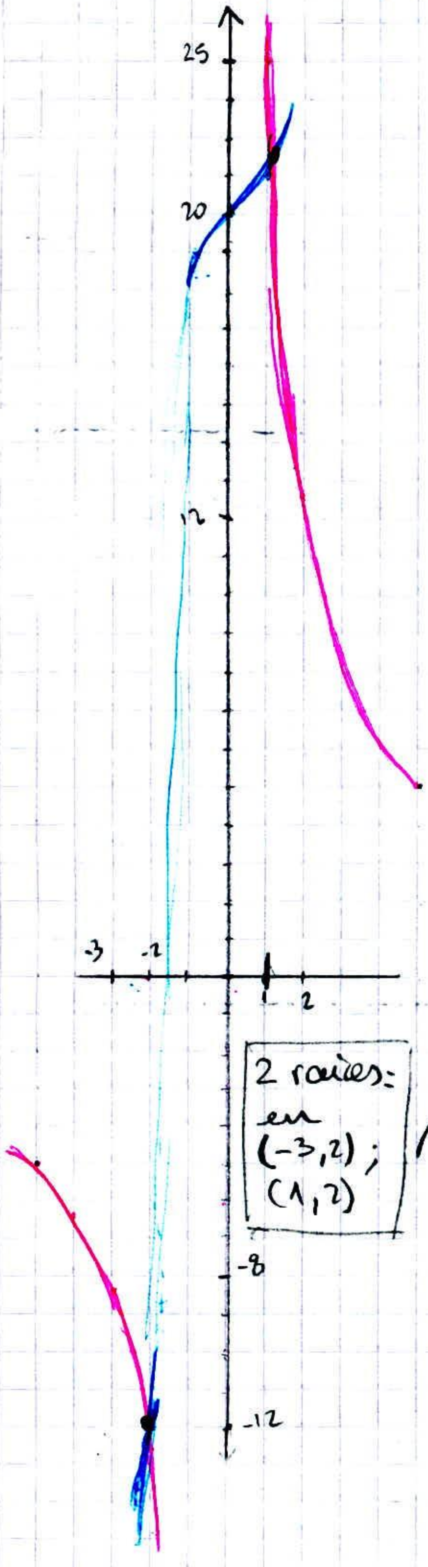
$\boxed{\text{2 raíces: } (1,2)\ ;\ (8;9)}$



m) $f_{13}(x) = x^6 + 20x - 25$

$x^6 + 20x = 25$

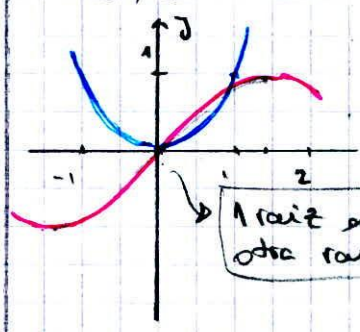
$x^5 + 20 = \frac{25}{x}$



2 raíces:
en
(-3,2) ;
(1,2)

n) $f_{14}(x) = \text{sen}(x) - x^2$

$\text{sen}(x) = x^2$



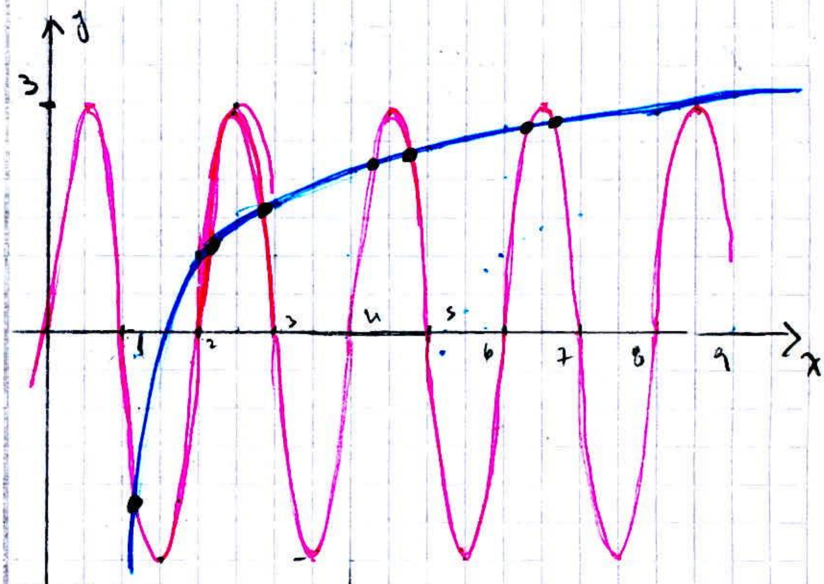
1 raiz en x=0
otra raiz en (0,1)

2 raíces. En:

(-0,5 ; 0,5) ; (0,5 ; 1,5)

ñ) $f_{15}(x) = \ln(x-1) + 1 - 3\,\text{sen}(\pi x)$

$\ln(x-1) + 1 = 3\,\text{sen}(\pi x)$



tiene 7 raíces, en :
(1;2) ; (1,5 ; 2,5) ; (2,5 ; 3,5) ;
(3,5 ; 4,5) ; (4,5 ; 5,5) , (5,5 ; 6,5)
(6,5 ; 7,5)

Sylvina

② a) Nombre los criterios de detención de un proceso iterativo de cálculo de raíces de ecuaciones, y la pertinencia de su utilización

- $\boxed{|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon}$

Es válido si la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas es cada vez menor. En la mayoría de los casos esto es cierto pero no será válido en aquellos casos donde la convergencia sea muy lenta.

- $\boxed{|f(x_n)| < \varepsilon}$

Es válido si la función tiene pendiente mayor a 1 en el intervalo donde se esté trabajando.
Si la derivada primera de $f(x)$ es menor que 1, aunque cumpla $|f(x_n)| < \varepsilon$, la distancia a la raíz es mayor que ε. En estos casos el criterio no sirve

es mayor que ε

b) Defina orden y radio de convergencia de un método de cálculo de raíces y su relación con la velocidad de convergencia.

Sea $\{x_n\} \to \alpha$ ← raíz → Se define p → ORDEN DE CONVERGENCIA
R → RADIO DE CONVERGENCIA

$$\exists\, p \geq 1 \wedge R \neq 0 \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = R$$

Si $p = 1$ → la convergencia es lineal
$p = 2$ → la convergencia es cuadrática

$$0 < R < 1$$

más rápido ↗ ↖ más lento

③ Explique conceptualmente el Método de Bisección para el cálculo de raíces de ecuaciones. Indique cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el método converja a una raíz.

En cada paso del método el intervalo se reduce a la mitad. El error máximo que se puede estar cometiendo se va reduciendo a la mitad en cada caso

$$\frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|} = \frac{1}{2}$$

Intervalo: (a,b)

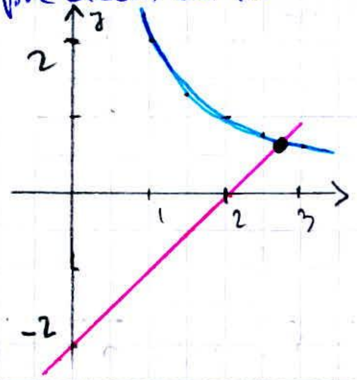
$$\boxed{\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon}$$

Mat Sup.

Raices de ecuac.

(4) Indique un intervalo para la raíz positiva de $x^2-2x-2=0$ Utilice el método de Bisección para calcular la raíz con dos decimales exactos. Establezca el número máximo de pasos necesarios para aproximar la raíz con una precisión de 10^{-6}

$$x^2-2x=2$$
$$x(x-2)=2$$
$$\boxed{x-2=\frac{2}{x}}$$



$\boxed{\text{1 raíz positiva en el intervalo } (2;3)}$

$(2;3)$: a, b

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \rightarrow \frac{3-2}{2^n} < 10^{-6}$$
$$10^6 < 2^n$$
$$\log(10^6) < \log(2^n)$$
$$6\log(10) < n\log(2)$$
$$\frac{6}{\log} < n$$
$$19{,}93 < n$$
$$\boxed{n=20}$$

Paso	a	b	$x_m=\frac{a+b}{2}$	f(a)	f(b)	f(x_n)
0	2	3	2,50	-2	1	-0,75
1	2,50	3	2,75	-0,75	1	0,0625
2	2,50	2,75	2,625	-0,75	0,0625	-0,35938
3	2,625	2,75	2,6875	-0,35938	0,0625	-0,1523
4	2,6875	2,75	2,7187	-0,1523	0,0625	-0,045898
5	2,7187	2,75	2,73435	-0,045898	0,0625	0,007969
6	2,7187	2,7343	2,7265	-0,045898	0,007969	-0,01919
7	2,7265	2,7343	2,73041	-0,01919	0,007969	-0,0057
8	2,7304	2,7343	2,73235	-0,0057	0,007969	0,00103

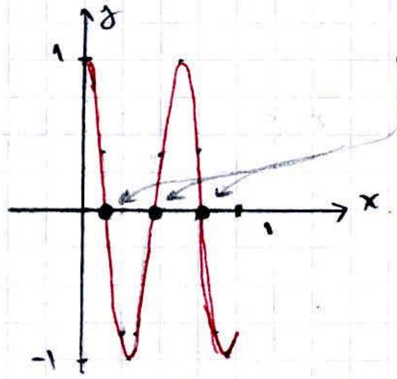
→ repiten los dos primeros decimales.

$$\boxed{\alpha = 2{,}73}$$

(5) Cada una de las siguientes funciones verifica que $sg(f(a)) \neq sg\, f(b)$ en $(a,b)=(0,1)$ ¿Qué punto localiza el algoritmo de bisección? ¿Es una raíz? Justifique

a) $f(x)=\frac{1}{3x-1}$ → tiene una asíntota en $x=1/3$ ∴ no es continua en $(0,1)$

b) $f(x)=\cos(10x)$



$\boxed{\text{tiene 3 raíces}}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0{,}3 \\ -1 & \text{si } x < 0{,}3 \end{cases}$ → No es continua en $(0,3)$ → No continua $(0;1)$

Sg 1

⑥ Marque la respuesta correcta y justifique:

Para hallar la raiz de una $f(x)$ continua en $(3;5)$ con $sg(f(3)) \neq sg\, f(5)$ con $\varepsilon < 10^{-5}$ por Bisección:

a) son necesarias 17 iteraciones
b) son necesarias 18 iteraciones
c) son suficientes 18 iteraciones ✓
d) ninguna de los anteriores

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \rightarrow \frac{5-3}{2^n} < 10^{-5} \rightarrow 10^5 < 2^{n-1}$$

#suficiente

$$\rightarrow 5 \log(10) < (n-1)\log(2) \rightarrow \frac{5}{\log(2)} < n-1 \rightarrow 17{,}61 < n \rightarrow \boxed{n = 18}$$

⑦ Dada $f(x) = 0$ con una raiz en el intervalo $(a, a+1)$. Indique el valor de verdad de los sig. proposiciones, justificando la respuesta:

a) Si $f(x)$ tiene pendiente grande, entonces el método de bisección converge más rápido.

FALSO. La rapidez no depende de la pendiente sino de la longitud del intervalo.

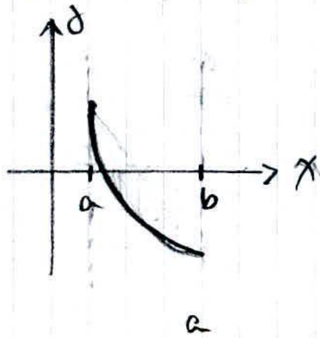
b) Si se aplica el método de bisección en dicho intervalo, al cabo de 10 iteraciones se tendrá una precisión de 10^{-10}

FALSO: si $\varepsilon < 10^{-10} \rightarrow \frac{a+1-a}{2^n} < 10^{-10} \rightarrow 10 \log(10) < n \log(2)$

$$\frac{10}{\log(2)} < n \rightarrow \boxed{n = 34}$$

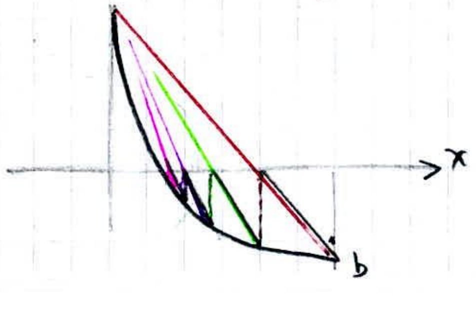
No hay certeza de eso, pues ya que serán suficientes 34 iteraciones, dependerá de la función si en el paso 10 se logra eso.

⑧ Explique conceptualmente en qué consiste el método de Regula Falsi para el caso particular de una función decreciente y cóncava hacia y+



Para este caso, se fija el valor de a y se traza la cuerda (unión de ambos extremos). y se observa en qué punto la cuerda corta el eje y se proyecta a la curva ("nuevo" valor b)

Es como ir armando una especie de escalera hasta llegar a α (raiz)



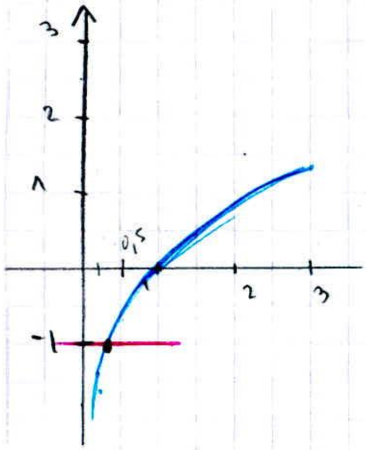
Mat Sup.

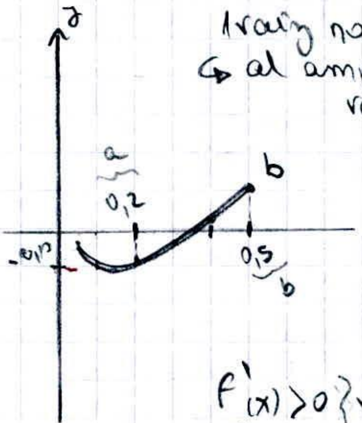
Raíces de ecuaciones

⑨ Dada $f(x) = x \ln(x) + x$ indique un intervalo (a, b) e indique qué extremo fijaría para hallar la raíz no nula por el método de Regula Falsi

$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} + 1 \rightarrow f'(x) = \ln(x) + 2$; $f''(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = 0 = x(\ln(x) + 1) \xrightarrow{\text{"raíz no nula"}} x \neq 0 \rightarrow \ln(x) = -1 \rightarrow \boxed{x = e^{-1} = 0{,}36788}$





1 raíz no nula $\in (0; 0.5)$

→ al ampliar el dibujo, observo que la raíz está en el intervalo $(\underset{a}{0{,}2}; \underset{b}{0{,}5})$

$a = 0.2$

$f(a) = f(0.2) = -0{,}1218876$

$\left.\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{matrix}\right\} \forall x \in (0.2; 0.5)$ $\left\{\begin{matrix} f'(0{,}2) = 0{,}39 \; ; \; f'(0{,}5) = 1{,}30 \\ f''(0{,}2) = 5 \; ; \; f''(0{,}5) = 2 \end{matrix}\right.$

$b = 0.5$, $f(b) = 0{,}153426$

$\boxed{\text{Se fija } b} \rightarrow \boxed{x_{n+1} = b - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(b)}$

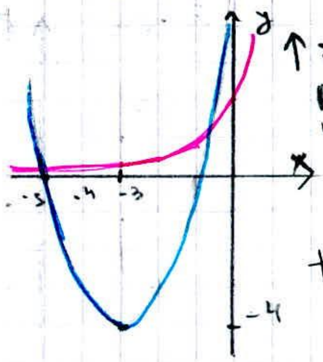
$x_1 = 0{,}332817$

$x_2 = 0{,}362658$; $x_3 = 0{,}367147$; $x_4 = 0{,}36777$; $\boxed{x_5 = 0{,}3678 \; ; \; x_6 = 0{,}3678}$

⑩ Dada la ecuación: $f(x) = 2e^x - x^2 - 6x - 5 = 0$ ¿qué intervalo podría tomar para calcular la menor raíz real por Regula Falsi sin necesidad de cambiar el extremo fijo? ¿Cuál sería dicho extremo?

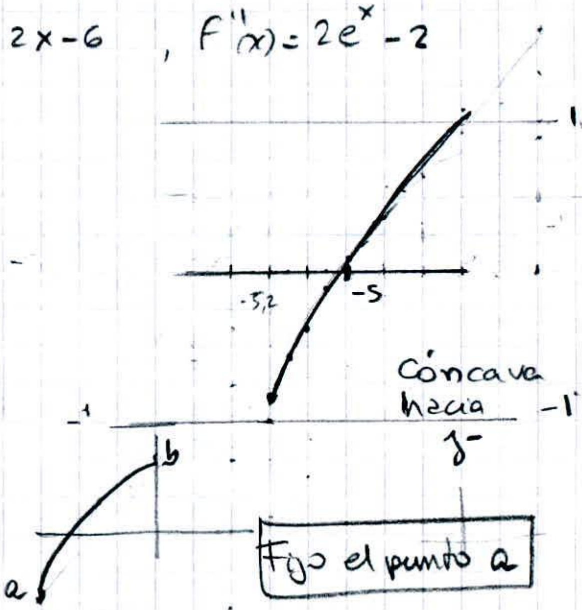
$f(x) = 2e^x - x^2 - 6x - 5 \longrightarrow f'(x) = 2e^x - 2x - 6$, $f''(x) = 2e^x - 2$

$2e^x = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$



↑ se vuelven a intersecar pero para este ejercicio no importa porque piden la "menor raíz real"

tiene una raíz en $(-6; -5)$



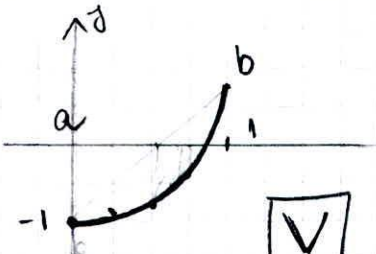
$\boxed{\text{Fijo el punto } a}$

Syl

11) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando la respuesta:

a) Sea $e^x + x^4 - x - 2 = 0$ con raíz en $(0,1)$ $\Rightarrow$ se puede usar Regula Falsi fijando el 1.

$f(x) = e^x + x^4 - x - 2$ es continua en $(0;1)$ y $f(0) = -1$ y $f(1) = 0{,}7182$
$\rightarrow$ hay, al menos, una raíz en $(0;1)$



$f'(x) = e^x + 4x^3 - 1 \xrightarrow{\text{en } (0;1)} f'(x) > 0$

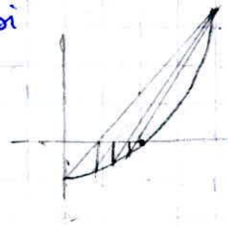
$f''(x) = e^x + 12x^2 \xrightarrow{\text{en } (0;1)} f''(x) > 0$

se fija b

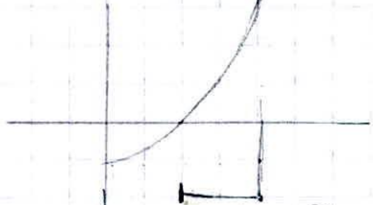
$\boxed{V}$

b) El método de Bisección siempre converge más lentamente que Regula Falsi

$\boxed{F}$



4 iteraciones



1 iteración

c) Dada la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 25x + 2 - 12e^{-x}$ se puede utilizar el Método de Regula-Falsi en el intervalo $[1,2]$, fijando el 2

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. $f(1) = -4{,}414$ ✓ $f(2) = 22{,}375$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 60x - 25 + 12e^{-x}$

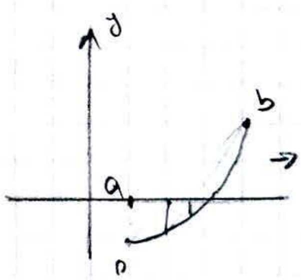
$f''(x) = 12x^2 - 48x + 60 - 12e^{-x}$

en $[1,2]$ $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ fijo b $\rightarrow$ $\boxed{\text{fijo } 2}$

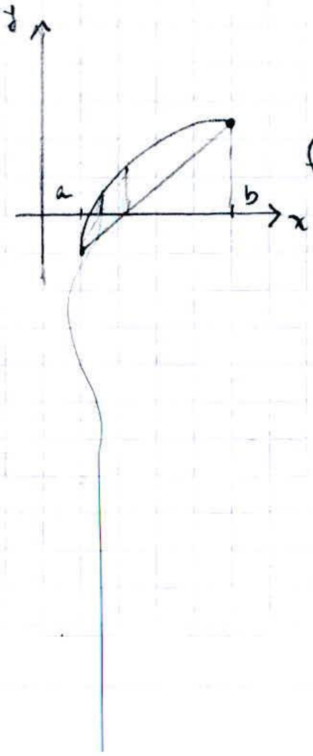
$\boxed{V}$

d) Si $f(x)$ es creciente en $(a;b)$ en el método de Regula-Falsi queda fijo el extremo b

$\boxed{F}$



$\rightarrow$ fijo b



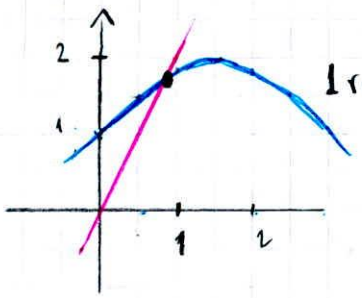
fijo a

(12) Dadas las sig. ecuaciones, proponga un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz e indique una función $g(x)$ que cumple las condiciones necesarias y suficientes di Método de Punto Fijo.
Haga tres iteraciones y diga la precisión obtenida.

a) $\operatorname{sen}(x) - 2x + 1 = 0$

$2x = \operatorname{sen}(x) + 1 \rightarrow x = \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{2} \rightarrow g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{2}$

$g'(x) = \frac{\cos(x)}{2} > 0$ y < 1 → converge



1 raíz $\in (0;1)$ (↓ a, ↓ b)

$x_0 = 0$

$x_1 = g(x_0) = g(0) = \frac{1}{2}$

$x_2 = g(\frac{1}{2}) = 0{,}739713$

$x_3 = g(x_2) = 0{,}837038$

$\varepsilon < 0{,}1$

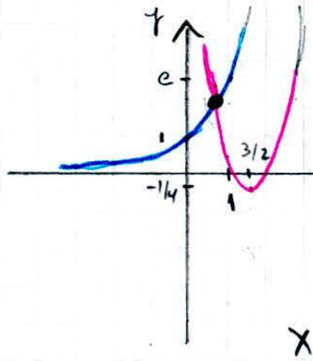
$x_0 = 1$
$x_1 = g(1) = 0{,}920735$
$x_2 = g(x_1) = 0{,}898023$
$x_3 = g(x_3) = 0{,}891048 \quad \varepsilon < 10^{-2}$

b) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = -e^x + x^2 + 2 \rightarrow x = \frac{-e^x + x^2 + 2}{3}$

$g(x) = \frac{-e^x + x^2 + 2}{3}$, $g'(x) = \frac{-e^x + 2x}{3}$ → en $(0,1)$ $-1 < g'(x) < 0$

converge en forma de espiral

$e^x = x^2 - 3x + 2 \rightarrow \boxed{e^x} = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$



1 raíz $\in (0;1)$

hay otra raíz más, pero el ej. pide 1

$x_0 = 1$

$x_1 = g(1) = 0{,}093906$

$x_2 = 0{,}303454$

$x_3 = 0{,}24585$

$\varepsilon < 0{,}1$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0{,}3333333$

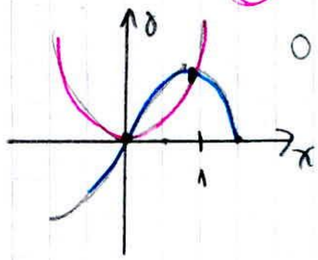
$x_2 = 0{,}238499562$

$x_3 = 0{,}2625129637$

$\varepsilon < 0{,}1$

c) $\operatorname{sen}(x) - x^2 = 0$

$\operatorname{sen}(x) = x^2$



0 es raíz

y tiene otra raíz en $(0;1)$

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \qquad g'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

$-1 < g'(x) < 0$

converge en espiral

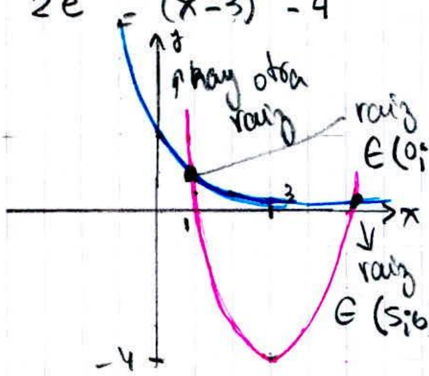
$x_0 = 1$
$x_1 = 0{,}84147098$
$x_2 = 0{,}88609608$
$x_3 = 0{,}8741813$ $\Big\} \varepsilon < 0{,}1$

d) $2e^{-x} - x^2 + 6x - 5 = 0 \rightarrow 6x = -2e^{-x} + x^2 + 5$

$$x = \frac{-2e^{-x} + x^2 + 5}{6} \qquad \boxed{g(x) = \frac{-2e^{-x} + x^2 + 5}{6}}$$

$2e^{-x} = x^2 - 6x + 5$

$2e^{-x} = (x-3)^2 - 4$



$$\boxed{0 < g'(x) = \frac{2e^{-x} + 2x}{6} < 1}$$

converge ✓

$x_0 = 1$

$x_1 = 0{,}8773735$

$x_2 = 0{,}823006$

$x_3 = 0{,}798853$ $\Big\} \varepsilon < 0{,}1$

$x_0 = 0$
$x_1 = 1/2$
$x_2 = 0{,}672823$
$x_3 = 0{,}7386$ $\Big\} \varepsilon < 0{,}1$

---

(13) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando la respuesta:

a) Si $0 < g'(x) < 1$ en el método de punto fijo para calcular las raíces de ecuaciones entonces la convergencia es en forma de espiral o alternada

$\boxed{F}$

es escalonada

b) Sea $e^x + x^4 - x - 2 = 0$ con raíz en $(0,1) \Rightarrow$ Se puede usar $g(x) = e^x + x^4 - 2$ para hallar la raíz por el método de punto fijo

$g'(x) = e^x + 4x^3 \xrightarrow{en\ (0;1)} g'(x) > 1 \therefore$ diverge con esta g $\boxed{F}$

c) la función $g(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ puede utilizarse para hallar una raíz con el método de punto fijo

$$g(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{2x-1}}$$

$g'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2x-1}}$ en un intervalo, por ejemplo, $(1;2)$ se puede utilizar, depende, obvio, de la función

$\boxed{V}$

Mat Sup.
Raíces

(14) La ecuación $x^3 - e^x + 3 = 0$ tiene 2 raíces. Una próxima a $-1{,}4$ y la otra cerca de $4{,}6$.
Usando el método de Punto Fijo con $g(x) = \ln(x^3+3)$ el método converge a:

(a) La raíz cercana a 4,6 b) La raíz cercana a −1,4

c) A ninguna de las dos raíces d) No es una $g(x)$ adecuada ya que contiene una función logarítmica

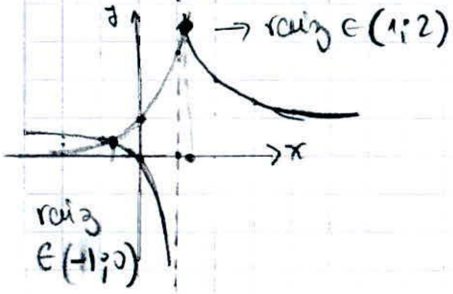
$g'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+3}$, $g'(4{,}6) = 0{,}6386 \rightarrow$ converge a 4,6

---

(15) Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x) = e^x - \dfrac{x}{x-1}$. Indique con cuál o cuáles de los sig. $g(x)$ converge (Mét. pto. fijo)

(a) $g_1(x) = e^x(x-1)$ b) $g_2(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ (c) $g_3(x) = -\dfrac{x}{e^x} + 1$ (d) $g_4(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$e^x = \dfrac{x}{x-1}$



• $g_1'(x) = e^x(x-1) + e^x \xrightarrow{\text{en } (-1;0)} -1 < g_1'(x) < 0$ converge en espiral

en $(1;2)$ diverge $(g'(x) > 1)$

• $g_2'(x) = \dfrac{\cancel{x-1}}{x}\left(\dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^{\cancel{2}}}\right) = \dfrac{-1}{x^2-x}$

→ en $(1;2)$ $g_2'(x) < -1$ diverge

→ en $(-1;0)$: diverge

• $g_3'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x}\,e^x} = \dfrac{1-x}{e^x}$

en $(-1;0)$ diverge

$\boxed{\text{en } (1,2) \text{ converge}}$

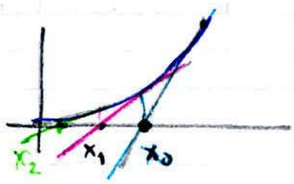
• $g_4(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ es la fórmula de Newton-Raphson ∴ converge

(16) Explique, conceptualmente, en qué consiste el método de Newton - Raphson

Sirve para aproximar una raíz simple bajo ciertas condiciones.

tiene convergencia cuadrática $(p=2)$.

El método consiste en hallar una sucesión x_n que converja a la raíz α, siendo los x_n los puntos en que la tangente de f corta al eje x.



(17) Dada la sig. ecuación: $x^5-2x^3-\ln(x)=0$ utilice el método de Newton Raphson con $x_0=1$ e itere hasta que se puedan asegurar 5 decimales ¿Qué ocurre si parte de $x_0=1.1$? Explique

$$f(x)=x^5-2x^3-\ln(x) \rightarrow f'(x)=5x^4-6x^2-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^5-2x_n^3-\ln(x_n)}{5x_n^4-6x_n^2-\frac{1}{x_n}}}$$

$x_0=1$
$x_1=0{,}5$
$x_2=0{,}648830488$
$x_3=0{,}6492335548$
$\boxed{x_4=0{,}6492335562}$ $\Big\}\ \varepsilon<10^{-5}$

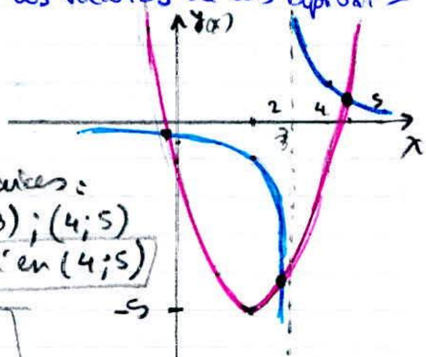
$x_0=1{,}1$
$x_1=-0{,}25$
No se puede continuar pues $\nexists \ln(-0{,}25)$

(18) Dada la ecuación: $(x-3)^{-1}-x^2+4x+1=0$ utilice el método Newton-Raphson hasta encontrar la mayor raíz con $\varepsilon<10^{-8}$. Transcriba los valores de las aproximaciones x_i.

Hallo los intervalos en donde están las raíces:

$$\frac{1}{x-3}=x^2-4x-1 \rightarrow \frac{1}{x-3}=(x-2)^2-5$$

tiene 3 raíces:
en $(-1;0)$; $(2;3)$; $(4;5)$
$\boxed{\text{la mayor está en } (4;5)}$



$$f(x)=\frac{1}{x-3}-x^2+4x+1$$

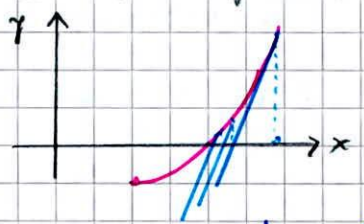
$$f'(x)=\frac{-1}{(x-3)^2}-2x+4 \rightarrow \boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{1}{x_n-3}-x_n^2+4x_n+1}{-\frac{1}{(x_n-3)^2}-2x_n+4}}$$

$x_0=4$
$x_1=4{,}4$
$x_2=4{,}391391238$
$x_3=4{,}391382381$
$\boxed{x_4=4{,}391382381}$

Mat. Superior
Cálculo de Raíces

(1ª) a) Explique, conceptualmente, la variante de Von Mises al método de Newton Raphson.

Consiste en fijar el valor del denominador con el valor de x_0, por lo que el denominador queda $f'(x_0)$.
Con esto, las rectas que cortan al eje son todas paralelas.



b) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas?

Ventaja: es más ágil en los cálculos pues no hay que calcular el denominador para cada x_n

Desventaja: es más lento en la convergencia

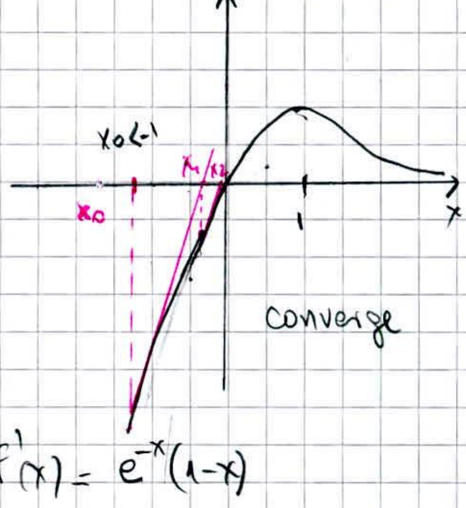
c) ¿en qué casos sería más conveniente?

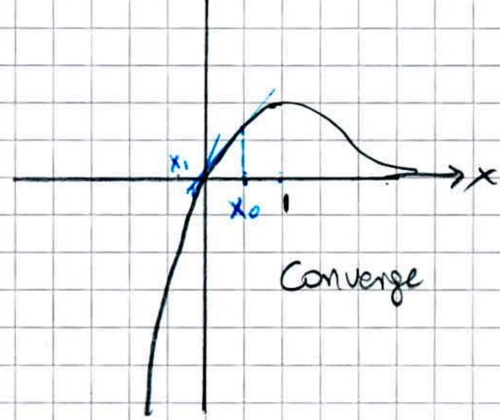
X

(2º) Marque la respuesta correcta y justifique:

Dada la función $f(x) = xe^{-x}$ con una única raíz real en $x=0$, el método de Newton-Raphson converge a ella:

a) siempre b) sólo tomando $x_0 < 0$ c) sólo tomando $x_0 < 1$ d) sólo tomando $x_0 \in (-1,1)$





$f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0$ en $x=1$

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x}$ en $x=1$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ en $x=1$ es máximo local

(21) La ecuación $x^4-4x^2+4=0$ tiene una raíz en $x=-\sqrt{2}$. El método de Newton-Raphson se acerca a dicha raíz con una precisión de 10^{-9} luego de 20 iteraciones.
La causa de que la convergencia sea tan lenta se debe a que:

~~a)~~ $f''(x)$ cambia de signo en las proximidades de $x=-\sqrt{2}$

~~b)~~ Se consideró un x_0 tal que $f(x_0).f''(x_0)<0$ → con esto divergiría

c) $x=-\sqrt{2}$ es una raíz con orden de multiplicidad mayor a 1

d) ninguna de las causas anteriores es correcta

• $f'(x) = 4x^3-8x \rightarrow f''(x) = 12x^2-8$ → no cambia de signo cerca de $x=-\sqrt{2}$

• $x^4-4x^2+4=0 \xrightarrow{\text{tomo } t=x^2} t^2-4t+4=0 \rightarrow (t-2)^2=0 \rightarrow t=2$ es raíz doble

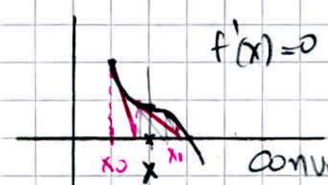
$t=2$ raíz doble y $|x|=\sqrt{t} \xrightarrow{\text{raíces}} |x|=\sqrt{2} \rightarrow x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$

$$0 = x^4-4x^2+4 = (x^2-2)^2 = (x^2-2)(x^2-2) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

$-\sqrt{2}$ es raíz doble

(22) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando su respuesta:

a) Dada $f(x)=0$ con raíz $p \in (a,b)$, si $\exists\, x \in (a,b)$ tal que $f'(x)=0$ entonces el método de Newton Raphson no converge a la raíz p. $\boxed{F}$



Puede o no converger

converge (saltea el lugar donde $f'(x)=0$)

b) Si $|f'(x)|<1 \Rightarrow$ el criterio de paro más conveniente es $|f(x_n)|<\varepsilon$

tarda un poco más en converger porque la tangente interseca al eje x lejos de α, pero luego se va acercando $\boxed{F}$

Mat. Superior.

Raíces de ecuac.

(23) Dada la ecuación: $\operatorname{sen}(4x)+3x+3=0$, indique cuál de las afirmaciones es correcta:

a) tiene por lo menos una raíz en el intervalo $[-1;0]$

b) Se puede aplicar Regula Falsi en $[-2;-0.5]$ fijando el extremo $b=-0,5$

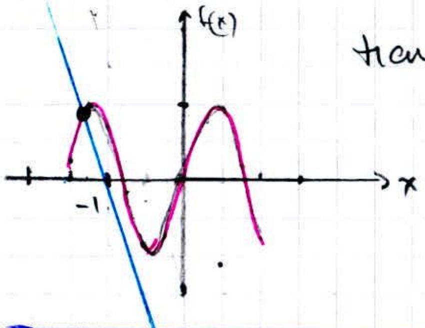
c) tiene una sola raíz real

d) El método de punto fijo converge con la función $g(x)=\operatorname{sen}(4x)+4x+3$

e) ninguna es correcta.

Halle los intervalos en donde está/n la/s raíces:

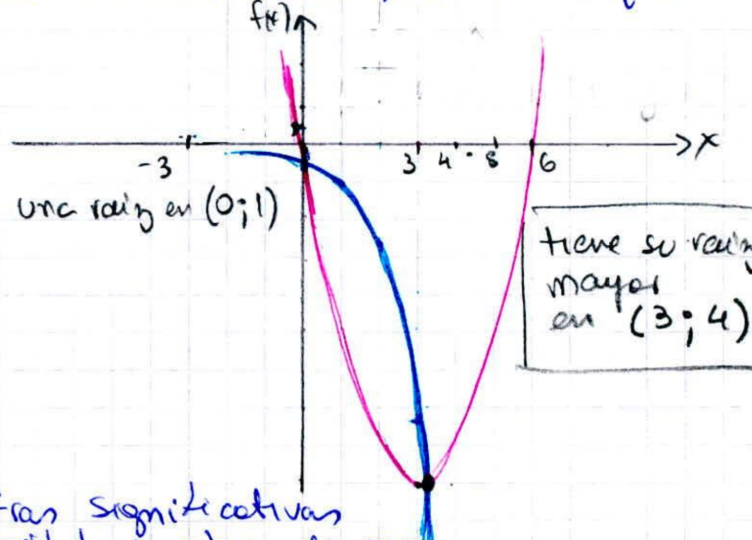
$\operatorname{sen}(4x) = -3x-3$



tiene 1 raíz en $(-2;-1)$

(24) a) Encuentre gráficamente un intervalo para la mayor raíz de $x^2-6x+e^{x-1}=0$

$x^2-6x = (x-3)^2-9 = -e^{x-1}$



una raíz en $(0;1)$

tiene su raíz mayor en $(3;4)$

$f(x) = x^2-6x+e^{x-1}$

$f'(x) = 2x-6+e^{x-1}$

b) Halle dicha raíz con 3 cifras significativas. Justifique la selección del método y criterio de paro

Utilizo el método de Newton Raphson por la velocidad en la convergencia.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-6x_n+e^{x_n-1}}{2x_n-6+e^{x_n-1}}$$

$x_0 = 3$
$x_1 = 3,218018$
$x_2 = 3,193433$

$\boxed{x_3 = 3,193074}$
$x_4 = 3,193074$

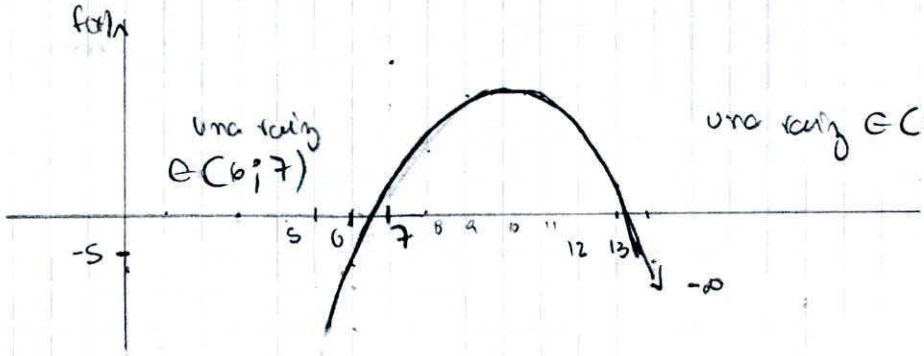
(25) La suma de dos números es 20. Si a cada número se le añade su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es igual a 155,55. Determine los dos números con exactitud de 10-4

Números: a, b , $a+b = 20 \rightarrow \boxed{b = 20-a}$

$$(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b}) = 155{,}55$$

$$ab + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + \sqrt{ab} = a(20-a) + a\sqrt{20-a} + (20-a)\sqrt{a} + \sqrt{a(20-a)} =$$

$$= 20a - a^2 + \sqrt{20a^2 - a^3} + 20\sqrt{a} - \sqrt{a^3} + \sqrt{20a - a^2} = 155{,}55$$



$$f(x) = 20a - a^2 + \sqrt{20a^2 - a^3} + 20\sqrt{a} - \sqrt{a^3} + \sqrt{20a - a^2} - 155{,}55$$

$$f'(x) = 20 - 2a + \frac{40a - 3a^2}{2\sqrt{20a^2 - a^3}} + \frac{10}{\sqrt{a}} - \frac{3}{2}\sqrt{a} + \frac{20-2a}{2\sqrt{20a-a^2}} \rightarrow f'(6) = 11{,}78455773$$

Uso el método Newton Raphson, versión Von Mises porque no me da el rango de la calculadora para poner la deriv. como variable

$x_0 = 6$

$x_1 = 6{,}478766197$

$x_2 = 6{,}508480175$

$x_3 = 6{,}512272138$

$x_4 = 6{,}512772344$

$x_5 = 6{,}512838603$

$\boxed{x_6 = 6{,}512847384} = a \rightarrow b = 20 - a = 13{,}48715262$

$$\boxed{a = 6{,}51285 \qquad b = 13{,}48715}$$

Mat Superior

Cálculo de raíces

(29) Demuestre que al aplicar Newton-Raphson a la función $y = x^2 - a$ con a positivo se llega a la fórmula: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ que permite calcular el valor de raíz de a sin emplear radicación

$y = f(x) \rightarrow f(x) = x^2 - a \rightarrow f'(x) = 2x$

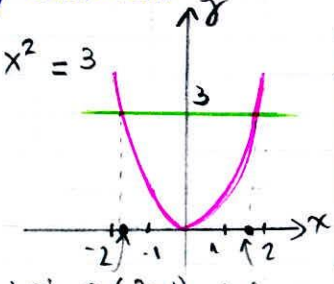
$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_n^2 - a}{2x_m} = \frac{2x_n^2 - x_m^2 + a}{2x_n} = \frac{x_m^2 + a}{2x_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^{\cancel{2}}}{\cancel{x_n}} + \frac{a}{x_n}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1}}$$

(30) Calcule la raíz cuadrada de 3 con un error menor que 10^{-8}, utilizando los sig. métodos:

$$\boxed{f(x) = x^2 - 3}$$

a) Bisección

$x^2 = 3$



1 raíz $\in (-2;-1)$ 1 raíz $\in (1;2)$

paso	a	b	x_n	f(a)	f(b)	f(x_n)
0	-2	-1	-1,5	1	-2	-0,75
1	-2	-1,5	-1,75	1	-0,75	0,0625
2	-1,75	-1,5	-1,625	0,625	-0,75	-0,359375
3	-1,75	-1,625	-1,6875	0,625	-0,359375	-0,1523438
4	-1,75	-1,6875	-1,71875	0,625	-0,1523438	-0,045898
...						
23	-1,7320508	-1,73205078	-1,732050806	0,0000003	-0,00000011	-0,0000001
24	-1,7320508	-1,73205078	-1,732050806	0,0000001	-0,00000011	-0,000000005

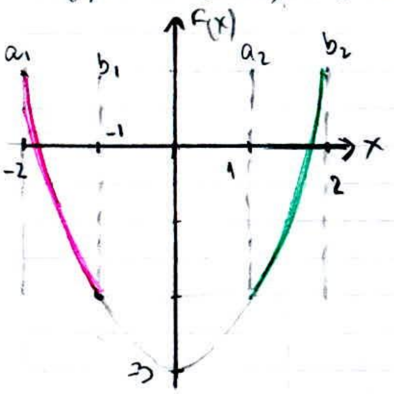
Con el intervalo (1;2) llego a los valores (con signos cambiados) de este cuadro, intercambiando col. a y b

$\boxed{|x_n| = 1,732050806}$ con Bisección

c) Regula-Falsi

$f(x) = x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f''(x) = 2 \quad \rightarrow f'(x)\, f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-2;-1) \rightarrow$ Fijo a

$f'(x)\, f''(x) > 0 \quad \forall x \in (1;2) \rightarrow$ Fijo b.



• $\boxed{\text{en } (-2;-1)}$: $x_{m+1} = a - \frac{x_m - a}{f(x_n) - f(a)} \cdot f(a)$ $\quad f(-2) = 1$

$$x_{m+1} = -2 - \frac{x_n + 2}{x_m^2 - 3 - 1}\, 1 \rightarrow x_{m+1} = -2 - \frac{x_n + 2}{x_m^2 - 4} =$$

$$= -2 - \frac{\cancel{(x_n + 2)}}{\cancel{(x_n+2)}\,(x_n - 2)} = -2 - \frac{1}{x_n - 2}$$

$x_0 = -2$
$x_1 = -1,75$
$x_2 = -1,7333333$
$x_3 = -1,732142857$
$x_4 = -1,73205742$
$x_5 = -1,732051282$
$x_6 = -1,732050842$

$x_7 = -1,73205081$
$\boxed{x_8 = -1,732050808}$

• $\boxed{\text{en } (1;2)}$: $x_{m+1} = 2 - \frac{x_m - 2}{x_m^2 - 4} \cdot 1$

$$\boxed{x_{m+1} = 2 - \frac{1}{x_n + 2}}$$

Los valores serán como en $(-2;-1)$ pero con signo inverso

$\boxed{x_8 = 1,732050808}$

Sol

b) Punto fijo.

$$f(x) = x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-3}{2x} = \frac{2x^2-x^2+3}{2x} = \frac{x^2+3}{2x}$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{x^2+3}{2x} \rightarrow g'(x) = \frac{2x\,2x - (x^2+3)2}{(2x)^2} = \frac{4x^2-2x^2-6}{4x^2} = \frac{2x^2-6}{4x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}$$

$|g'(x)| < 1 \ \forall x \in (-2;-1)$ ✓ $\qquad |g'(x)| < 1 \ \forall x \in (1;2)$ ✓

$X_0 = -2$
$X_1 = -1{,}75$
$X_2 = -1{,}732142857$
$X_3 = -1{,}73205081$
$\boxed{X_4 = -1{,}7320508 08}$

$X_0 = 2 \leftarrow$ es el más cercano
$X_1 = 1{,}75$
$X_2 = 1{,}732142857$
$\boxed{X_4 = 1{,}732050808}$

d) Newton-Raphson

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ resulta ser igual que con la g(x) utilizada en el inciso anterior.

$$\boxed{|X_4| = 1{,}732050808}$$

Para llegar al valor de la raíz de $x^2=3$ fueron necesarias:

- Bisección : 24 iteraciones
- Punto Fijo : 4 iteraciones
- Regula-Falsi : 8 iteraciones
- Newton-Raphson: 4 iteraciones

(26) Aplique el método de Newton-Raphson a $x^3-2x^2-3x+10=0$, con $x_0=1{,}9$. ¿Es posible dar una explicación al comportamiento extraño de los valores iterados sucesivos?

$$f(x)=x^3-2x^2-3x+10 \rightarrow f'(x)=3x^2-4x-3$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x^3-2x^2-3x+10}{3x^2-4x-3}$$

$f'(1{,}9)=0.23$

tiene poca pendiente en x_0 por eso se alejó tanto en x_1 y x_2

$x_0 = 1{,}9$
$x_1 = -15{,}22608696$
$x_2 = -9{,}999274138$
$x_3 = -6{,}557389007$
$x_4 = -4{,}335124544$
$x_5 = -2{,}976923292$
$x_6 = -2{,}267644318$
$x_7 = -2{,}028441479$
$x_8 = -2{,}000373327$
$x_9 = -2{,}00000066$
$\boxed{x_{10} = -2}$

---

(27) La ecuación $x^5-8x^4+17x^3-8x^2-14x+20=0$ tiene una raíz en $(-2;1)$. Sin embargo, si se aplica el método de Newton Raphson con $x_0=-0.3$ llegamos a otra raíz en 5 ¿por qué?

$$f(x)=x^5-8x^4+17x^3-8x^2-14x+20 \rightarrow f'(x)=5x^4-32x^3+51x^2-16x-14$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^5-8x_n^4+17x_n^3-8x_n^2-14x_n+20}{5x_n^4-32x_n^3+51x_n^2-16x_n-14}$$

$f'(-0{,}3)=-3{,}7055$

$x_0 = -0{,}3$
$x_1 = 5{,}8945136$
$x_2 = 5{,}3714976$
$x_3 = 5{,}09217782$
$x_4 = 5{,}0074128$
$x_5 = 5{,}00052856$
$x_6 = 5{,}00000003$
$x_7 = 5$

Sylvina

(28) Dada la ecuación $x^4-7x^3+12x^2+4x-16=0$ cuyas raíces son enteras: $-1, 2$ y 4, aplique el método de Newton-Rapson, tomando diferentes valores iniciales x_0 y vea a qué raíz converge en cada caso.
Tome los sig. valores iniciales, previamente piense en forma intuitiva a qué raíz le parece que converge:

$$f(x)=x^4-7x^3+12x^2+4x-16 \rightarrow f'(x)=4x^3-21x^2+24x+4$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x^4-7x^3+12x^2+4x-16}{4x^3-21x^2+24x+4}$$

$x_0=5$
$x_1=4{,}45455$
$x_2=4{,}14186$
$x_3=4{,}01957$
$x_4=4{,}0045$
$x_5=4$

$x_0=-2$
$x_1=-1{,}4$
$x_2=-1{,}09451$
$x_3=-1{,}00697$
$x_4=-1{,}0004$
$x_5=-1$

$x_0=1$
$x_1=1{,}54545$
$x_2=1{,}77298$
$x_3=1{,}88486$
$\vdots$
$x_{17}=1{,}99999$
$x_{18}=2$

$x_0=1$
$x_1=4$

$x_0=3$
$x_1=2{,}20$
$x_2=2{,}09751$
$x_3=2{,}04827$
$\vdots$
$x_{16}=2{,}00001$
$x_{17}=2$

$x_0=3{,}5$
$x_1=5{,}75$
$x_2=4{,}95186$
$x_3=4{,}42447$
$x_4=4{,}12731$
$x_5=4{,}01607$
$x_6=4{,}00030$
$x_7=4$

$x_0=3{,}3$
$x_1=0{,}37985$
$x_2=1{,}65216$
$x_3=1{,}82462$
$\vdots$
$x_{18}=1{,}9999$
$x_{19}=2$

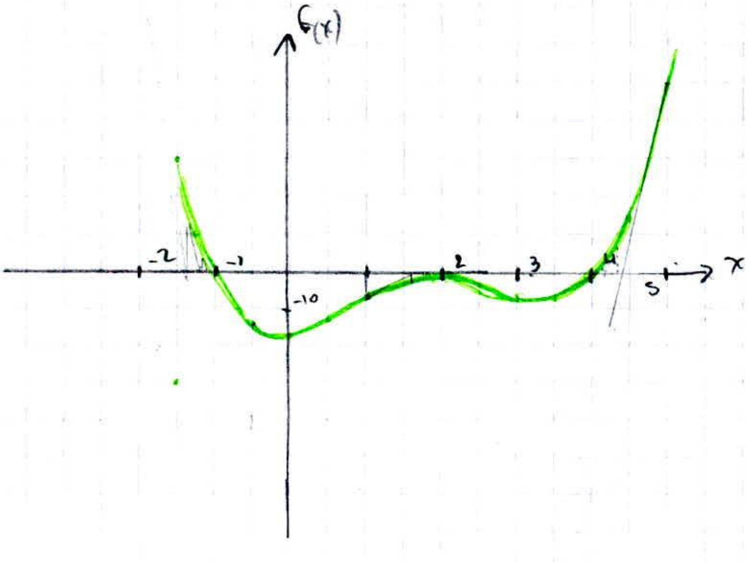
$x_0=3{,}4$
$x_1=95{,}8$
$x_2=72{,}29591$
$x_3=54{,}67062$
$\vdots$
$x_{17}=4{,}0013$
$x_{18}=4$

$x_0=0{,}035$
$x_1=-0{,}32626$
$x_2=-1{,}59695$
$x_3=-1{,}26652$
$x_4=-1{,}04694$
$x_5=-1{,}00181$
$x_6=-1$

$x_0=0{,}0359$
$x_1=3{,}31246$
$x_2=-0{,}00674$
$x_3=4{,}16981$
$x_4=4{,}02704$
$x_5=4{,}00084$
$x_6=4$

$x_0=0{,}036$
$x_1=3{,}31094$
$x_2=0{,}04669$
$x_3=3{,}15751$
$\vdots$
$x_{18}=1{,}99999$
$x_{19}=2$

$x_0=3{,}35$
$x_1=-2{,}43352$
$x_2=-1{,}66673$
$x_3=-1{,}21664$
$x_4=-1{,}03246$
$x_5=-1{,}00088$
$x_6=-1$



En donde la gráfica de f tiene una pendiente muy pronunciada (en puntos cercanos a α_i), converge a α_i, en forma rápida (5 o 6 iteraciones)

En $x=1$ y $x=3$ tarda en converger a su raíz más cercana ya que $x=2$ es raíz doble (por lo que tiene un máximo local)

En x con valores cercanos al 3 converge a distintas raíces, como en cercanos al 0, pues en esos puntos f tiene mínimo local (pendiente muy suave)